تحليل عقدي 1
السنة الثالثة ف1
2017 - 11 - 23
المحاضرة العاشرة

مكتبة الشرين
كلية العلوم
قسم الرياضيات
د. [illegible]

$$\begin{cases} \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y \\ \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y \end{cases}$$

من العلاقتين السابقتين نستنتج

$$|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y$$

وبما أن $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ نجد أن

$$|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x (1 - \sin^2 y) + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y$$

$$= \operatorname{sh}^2 x + (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) \sin^2 y$$

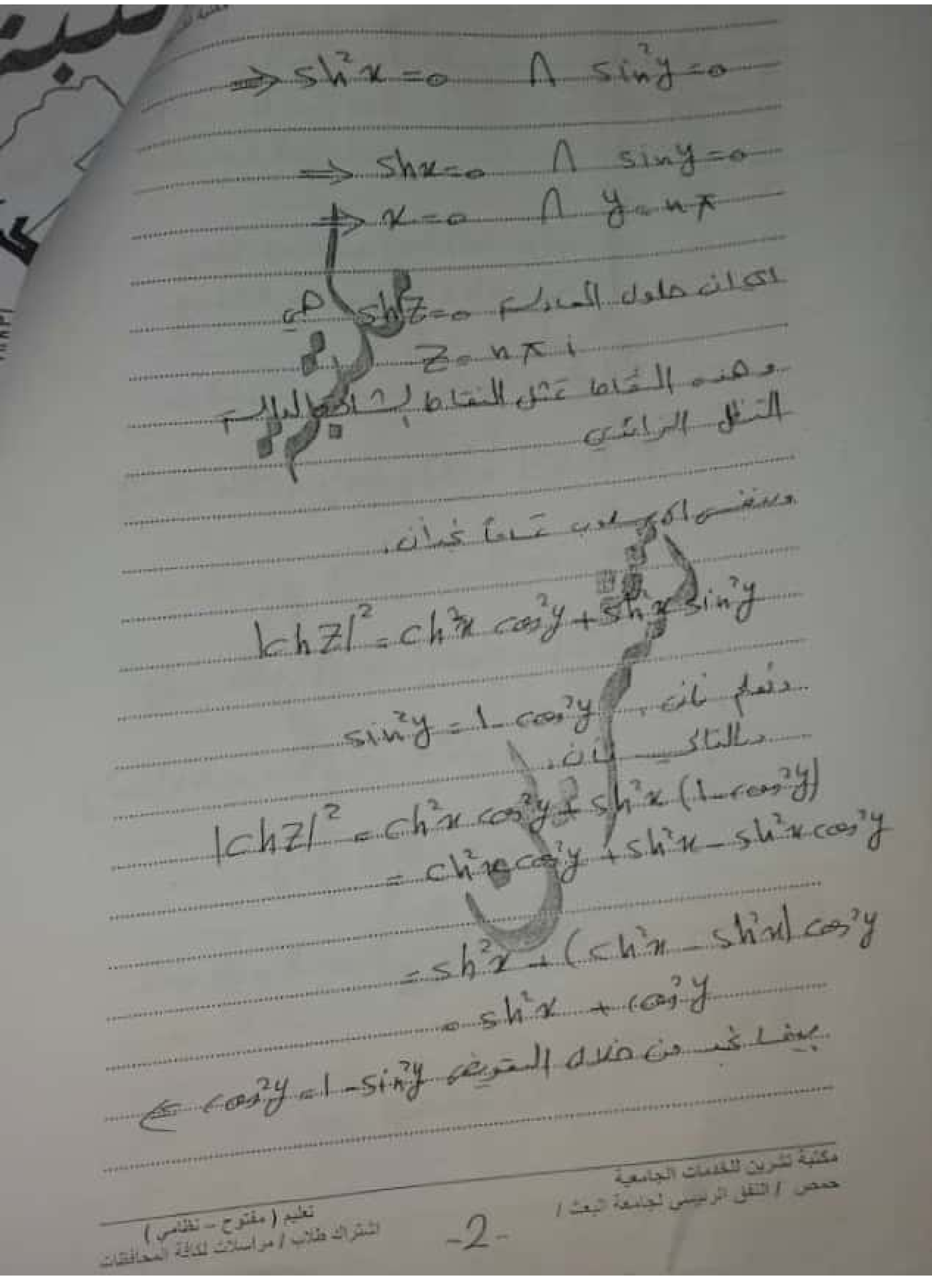
$$= \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y$$

ومن هذه العلاقة يمكن الحصول على أصفار التابع

$$\operatorname{sh} z = 0$$

$$|\operatorname{sh} z|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{ch}^2 x + \sin^2 y = 0$$



$\Rightarrow sh^2x = 0 \quad \wedge \quad \sin^2 y = 0$

$\Rightarrow shx = 0 \quad \wedge \quad \sin y = 0$

$\Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad y = n\pi$

أي أن حلول المعادلة $sh z = 0$ هي

$z = n\pi i$

وهذه النقاط تمثل النقاط الشاذة للتابع [illegible]
الشكل الرياضي

وبنفس الأسلوب تماماً نجد أن:

$|ch z|^2 = ch^2x \cos^2 y + sh^2x \sin^2 y$

ونعلم أن: $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$

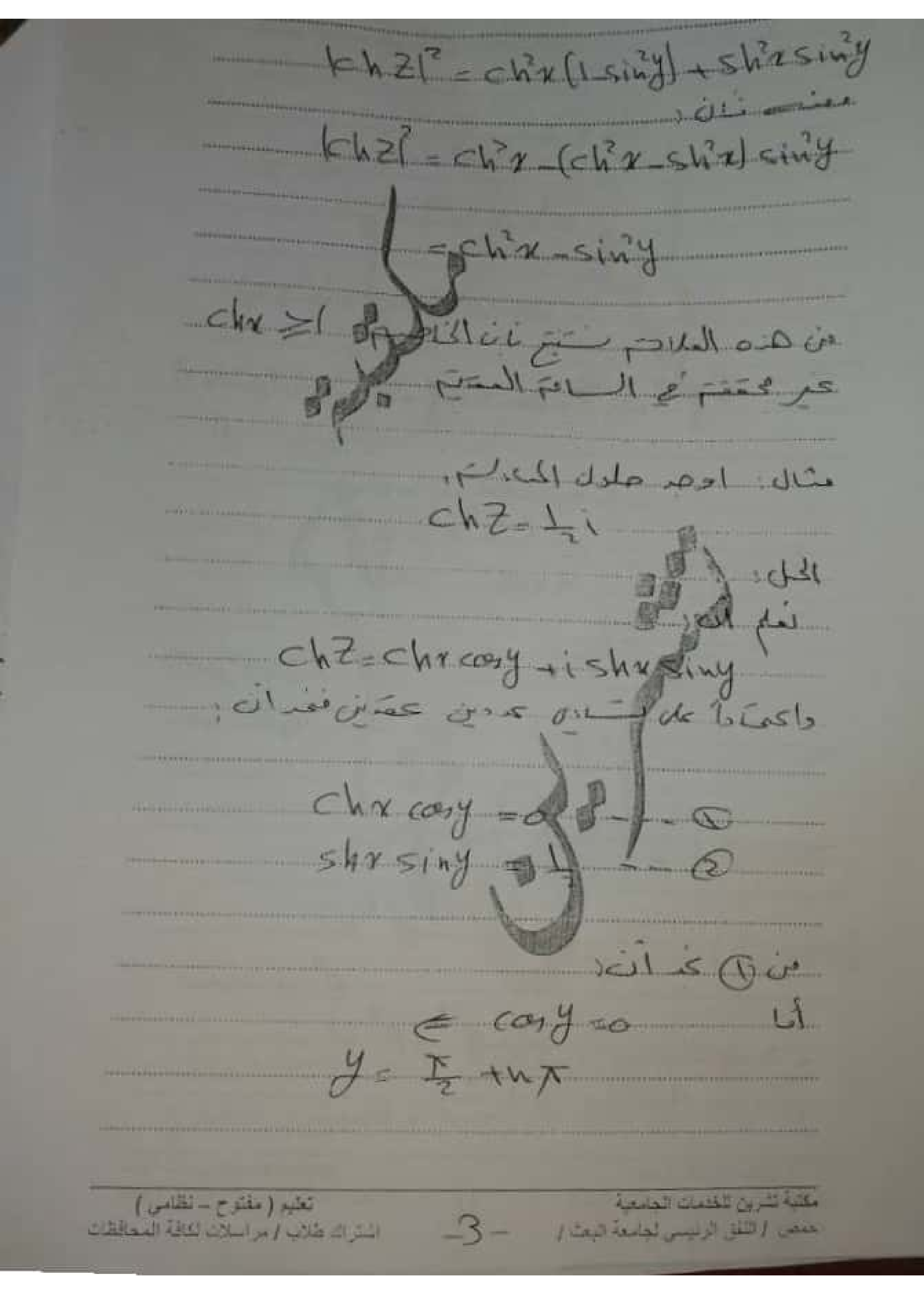
وبالتالي نجد أن:

$|ch z|^2 = ch^2x \cos^2 y + sh^2x (1 - \cos^2 y)$
$= ch^2x \cos^2 y + sh^2x - sh^2x \cos^2 y$

$= sh^2x + (ch^2x - sh^2x) \cos^2 y$

$= sh^2x + \cos^2 y$

بينما نجد من خلال التعويض $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y \Leftarrow$



$$|chz|^2 = ch^2x(1-\sin^2y) + sh^2x\sin^2y$$

ومنه نجد:

$$|chz|^2 = ch^2x - (ch^2x - sh^2x)\sin^2y$$

$$= ch^2x - \sin^2y$$

من هذه العلاقة نستنتج أن الخاصة $chx \geq 1$ غير محققة في الساحة العقدية

مثال: اوجد حلول المعادلة:

$$chz = \frac{1}{2}i$$

الحل:

نعلم أن:

$$chz = chx\cos y + i\,shx\sin y$$

وكما أنه لتساوي عددين عقديين فإن:

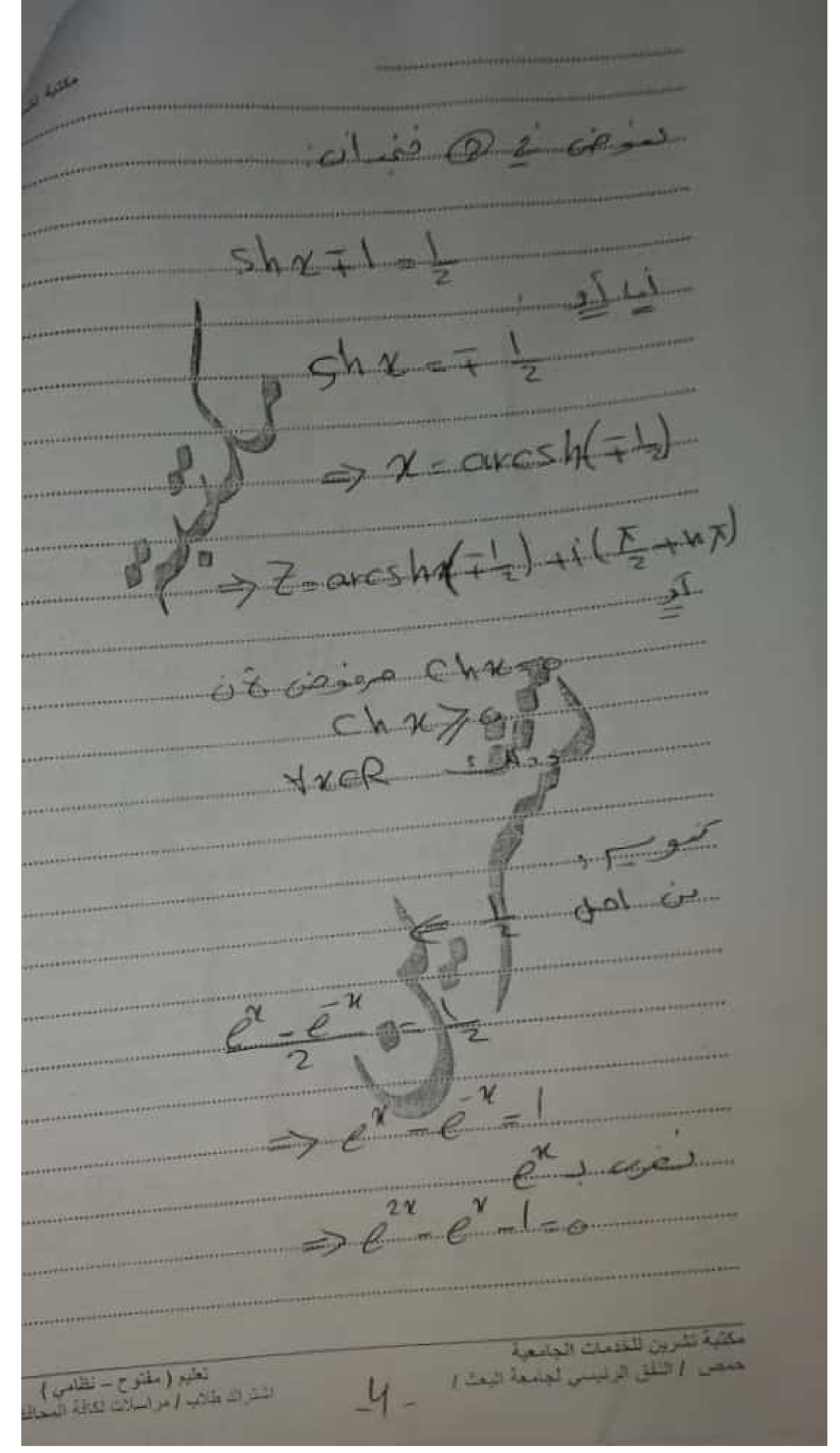
$$chx\cos y = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$shx\sin y = \frac{1}{2} \quad \text{--- (2)}$$

من (1) نجد أنه:

أما $\cos y = 0 \Rightarrow$

$$y = \frac{\pi}{2} + n\pi$$



نعوض في ② فنجد أن

$sh x \mp 1 = \frac{1}{2}$

أي أن

$sh x = \mp \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = arcsh(\mp \frac{1}{2})$

$\Rightarrow Z = arcsh(\mp \frac{1}{2}) + i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$

أو

$ch x = 0$ مرفوض لأن

$ch x \geq 0$

وذلك $\forall x \in R$

نعوض في ③

من أجل

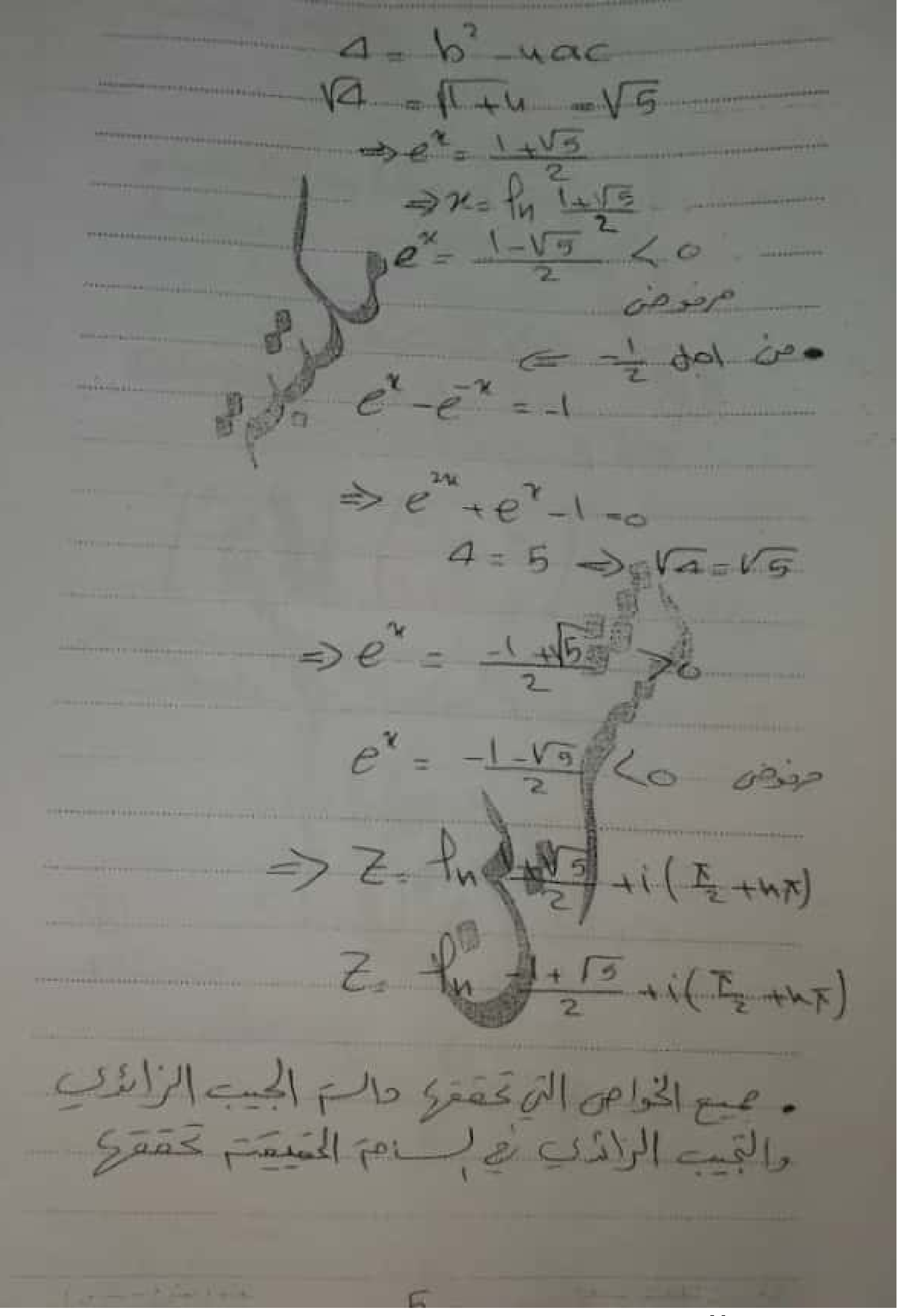
$= \frac{1}{2}$

$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow e^{x} - e^{-x} = 1$

نضرب بـ e^{x}

$\Rightarrow e^{2x} - e^{x} - 1 = 0$



$\Delta = b^2 - 4ac$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow e^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow x = \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$e^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$

مرفوض

• من اجل $-\frac{1}{2} \Leftarrow$

$e^x - e^{-x} = -1$

$\Rightarrow e^{2x} + e^x - 1 = 0$

$\Delta = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$

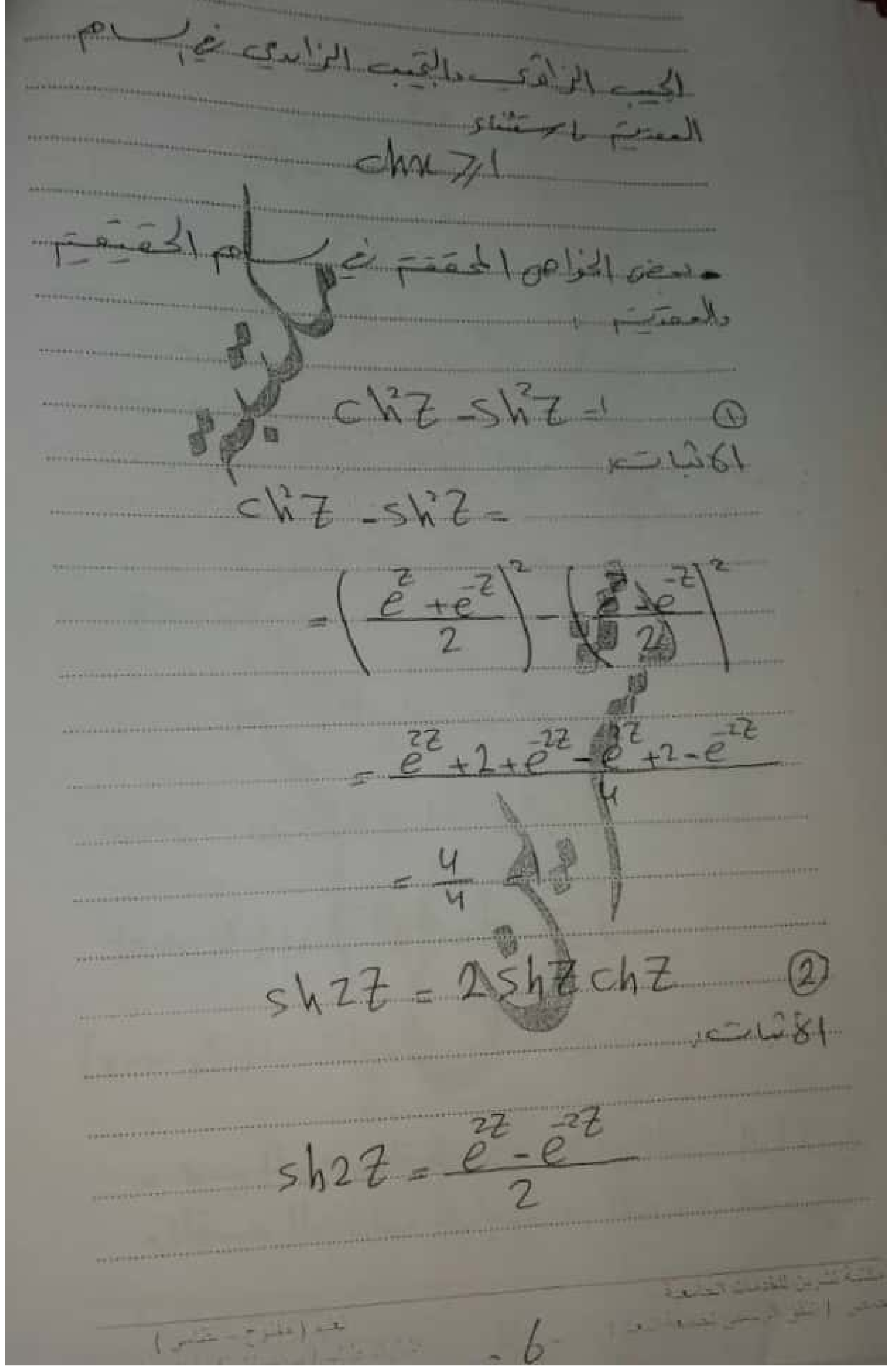
$\Rightarrow e^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$

$e^x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ مرفوض

$\Rightarrow z = \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$z = \ln \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

• جميع الخواص التي تحققها دوال الجيب الزائدي
والتجيب الزائدي في ساحة الحقيقية تحققها



الجيب الزائدي والتجيب الزائدي في سلم العقدي باستثناء

$$ch\,x \geq 1$$

بعض الخواص الحقيقية في سلم الحقيقي والعقدي

① $ch^2 z - sh^2 z = 1$

الإثبات

$$ch^2 z - sh^2 z =$$

$$= \left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2z}+2+e^{-2z}-e^{2z}+2-e^{-2z}}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

② $sh2z = 2\,sh z\,ch z$

الإثبات

$$sh2z = \frac{e^{2z}-e^{-2z}}{2}$$

ونعوض ١ ← شكل ، $\frac{a^2 - b^2}{2}$

$$\Rightarrow 2 \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$= 2 \sinh z \cosh z$$

مثال: اوجد حلول المعادلة:

$$\sinh z = 2i$$

الحل: نعلم أن:

$$\cosh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

أي أنه وبما تساوي عددين مركبين يعني تساوي في
الحقيقي والتخيلي نجد أن،

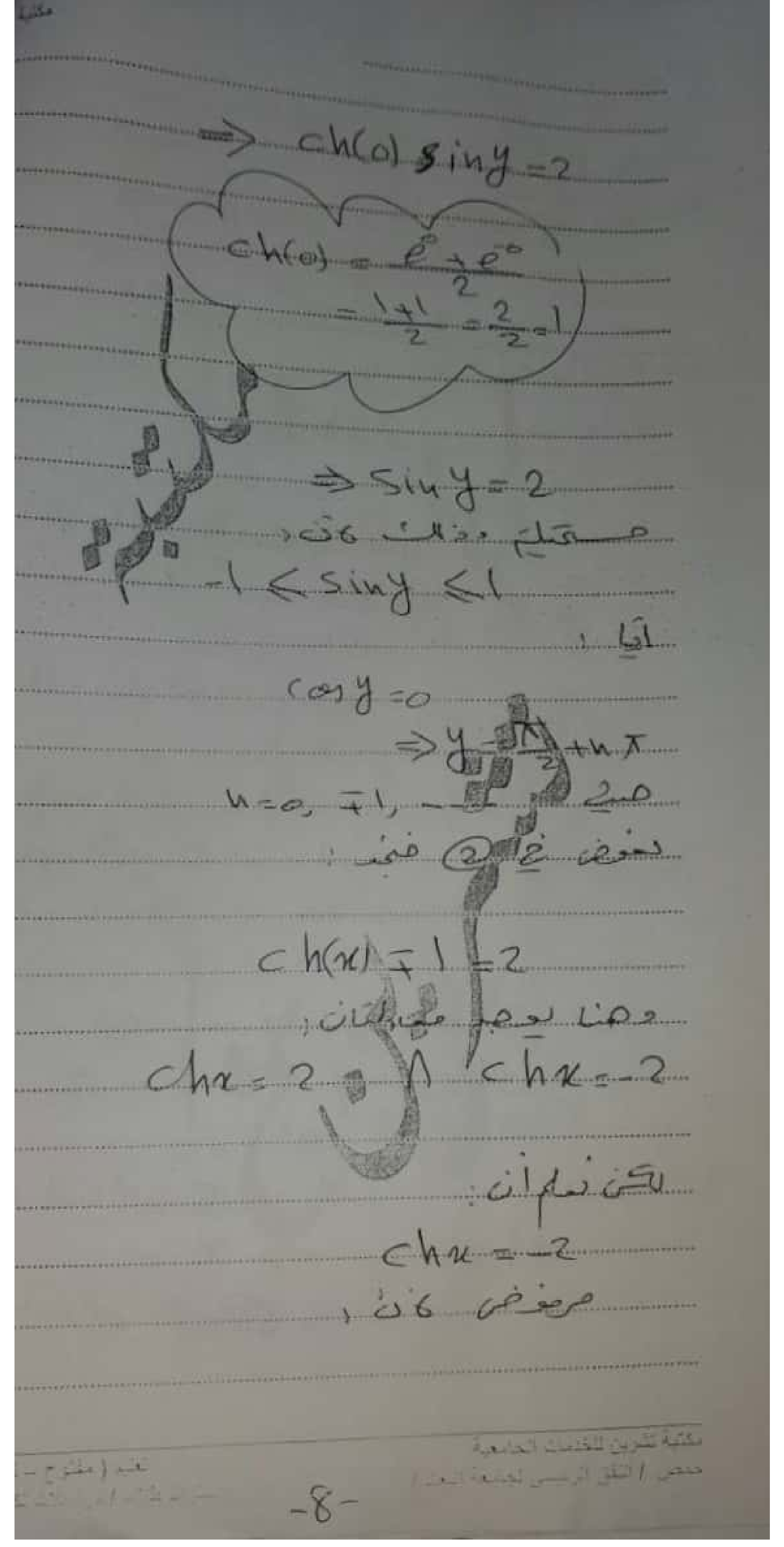
$$\sinh x \cos y = 0 \quad \text{---} \; (1)$$

$$\cosh x \sin y = 2 \quad \text{---} \; (2)$$

من المعادلة (1) نجد أن:

$$\cosh x = 0 \Rightarrow x = 0$$

نعوض في (2)



$\Rightarrow ch(0)\sin y = 2$

$ch(0) = \frac{e^{0} + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow \sin y = 2$

مستحيل وذلك لأن:

$-1 \leq \sin y \leq 1$

ثانيا:

$\cos y = 0$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + n\pi$

حيث $n = 0, \mp 1, \ldots$

نعوض في ② فنجد:

$ch(x) \mp 1 = 2$

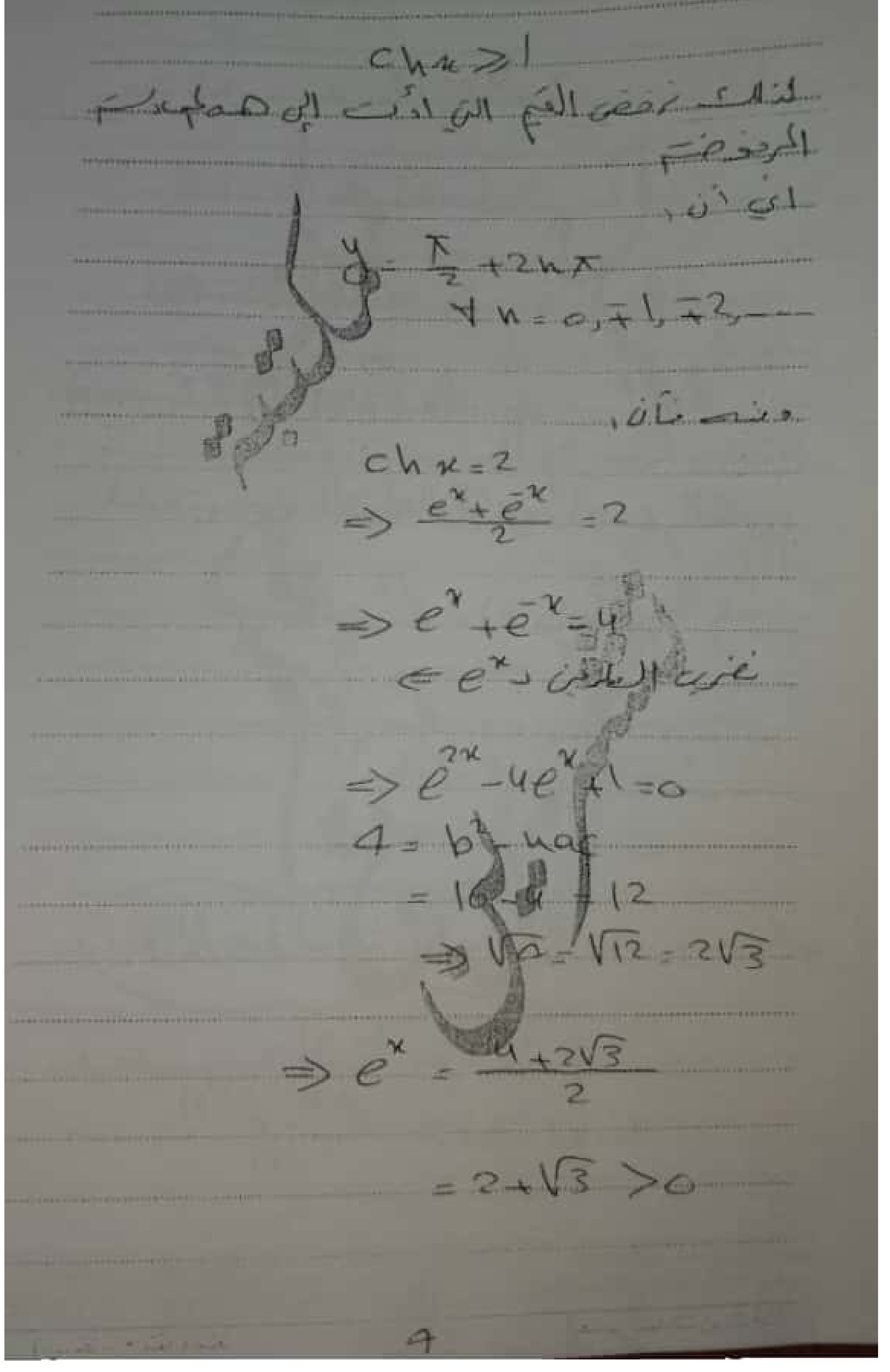
وهنا نجد معادلتان:

$chx = 2 \wedge chx = -2$

لكن نعلم أن:

$chx = -2$

مرفوض لأن،



$ch\,x \geq 1$

لذلك نرفض القيم التي أدت إلى هذا التناقض المرفوض

أي أن،

$$y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \forall k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

ومنه فإن،

$$ch\,x = 2$$

$$\Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$$

$$\Rightarrow e^x + e^{-x} = 4$$

نضرب الطرفين بـ $e^x \Leftarrow$

$$\Rightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$$

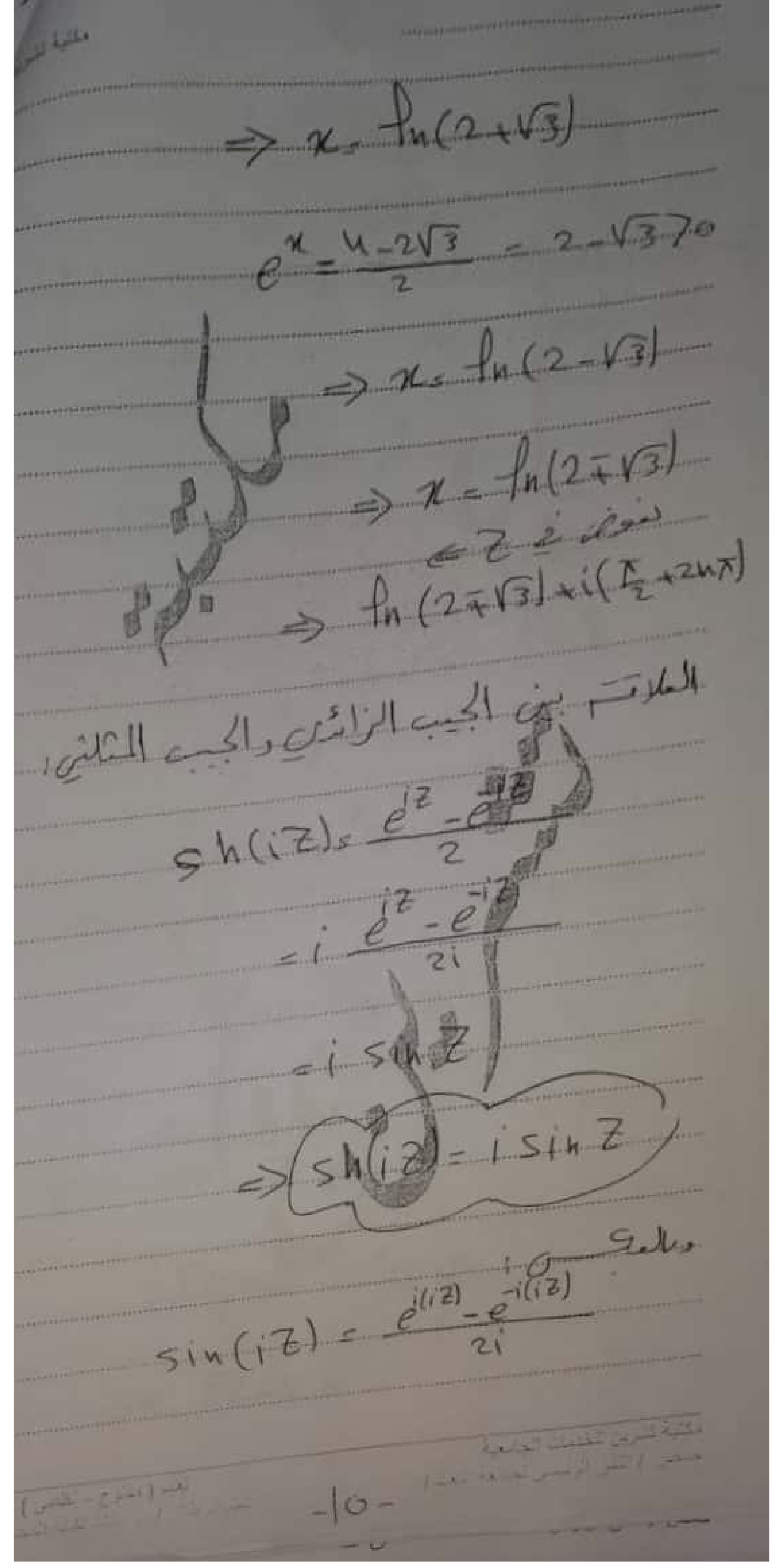
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 16 - 4 = 12$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow e^x = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + \sqrt{3} > 0$$



$\Rightarrow x = \ln(2+\sqrt{3})$

$e^{x} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3} > 0$

$\Rightarrow x = \ln(2-\sqrt{3})$

$\Rightarrow x = \ln(2\mp\sqrt{3})$

نعوض في $z \Leftarrow$

$\Rightarrow \ln(2\mp\sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)$

العلاقة بين الجيب الزائدي والجيب المثلثي:

$sh(iz) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$

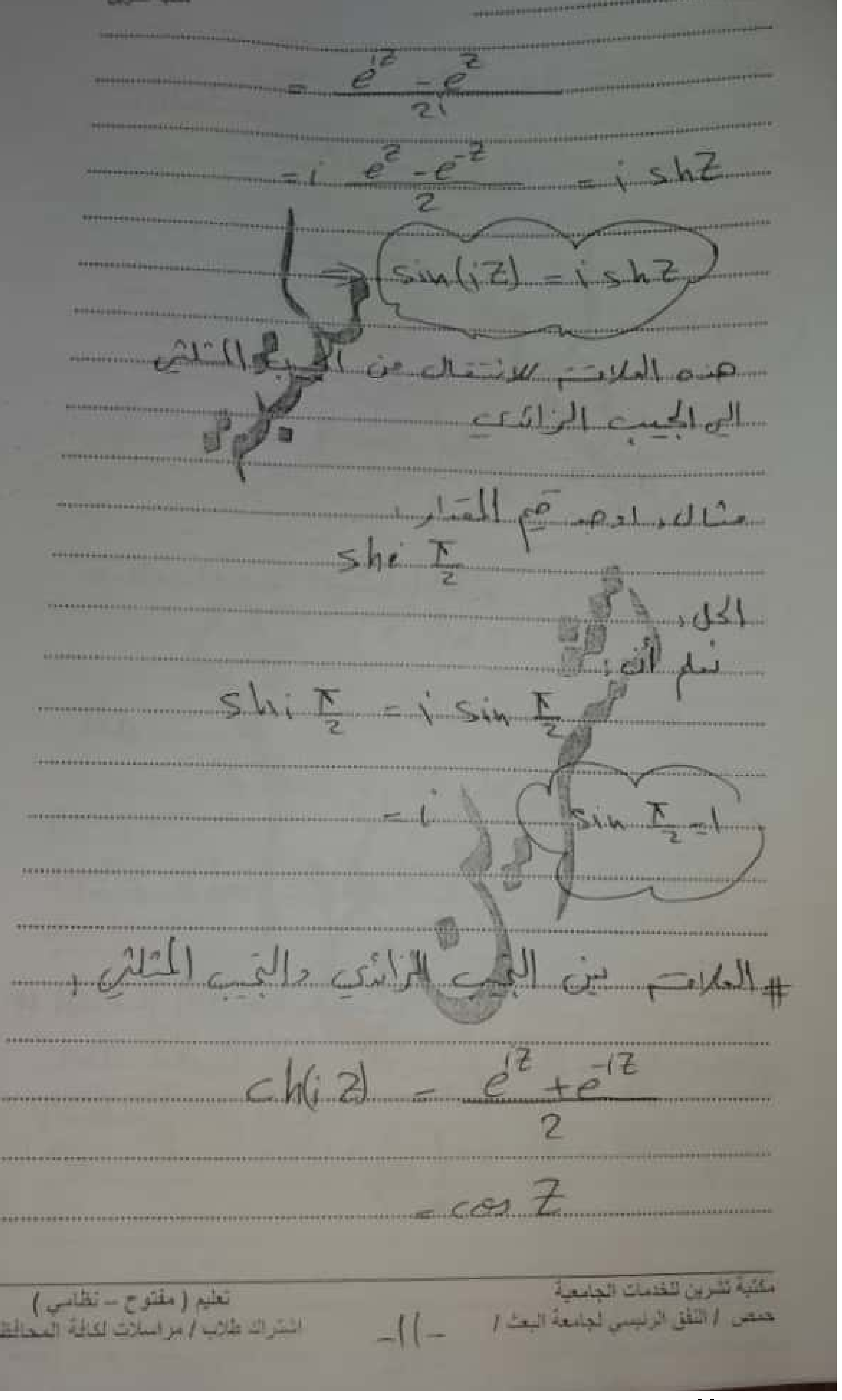
$= i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$= i\sin z$

$\Rightarrow sh(iz) = i\sin z$

وبالعكس:

$\sin(iz) = \frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2i}$



$$= \frac{e^{iz} - e^{-z}}{2i}$$

$$= i\,\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i\,shZ$$

$$\sin(iZ) = i\,shZ$$

هذه العلاقة للانتقال من الجيب المثلثي الى الجيب الزائدي

مثال: اوجد قيم المقدار $sh\,i\,\frac{\pi}{2}$

الحل:
نعلم أن:

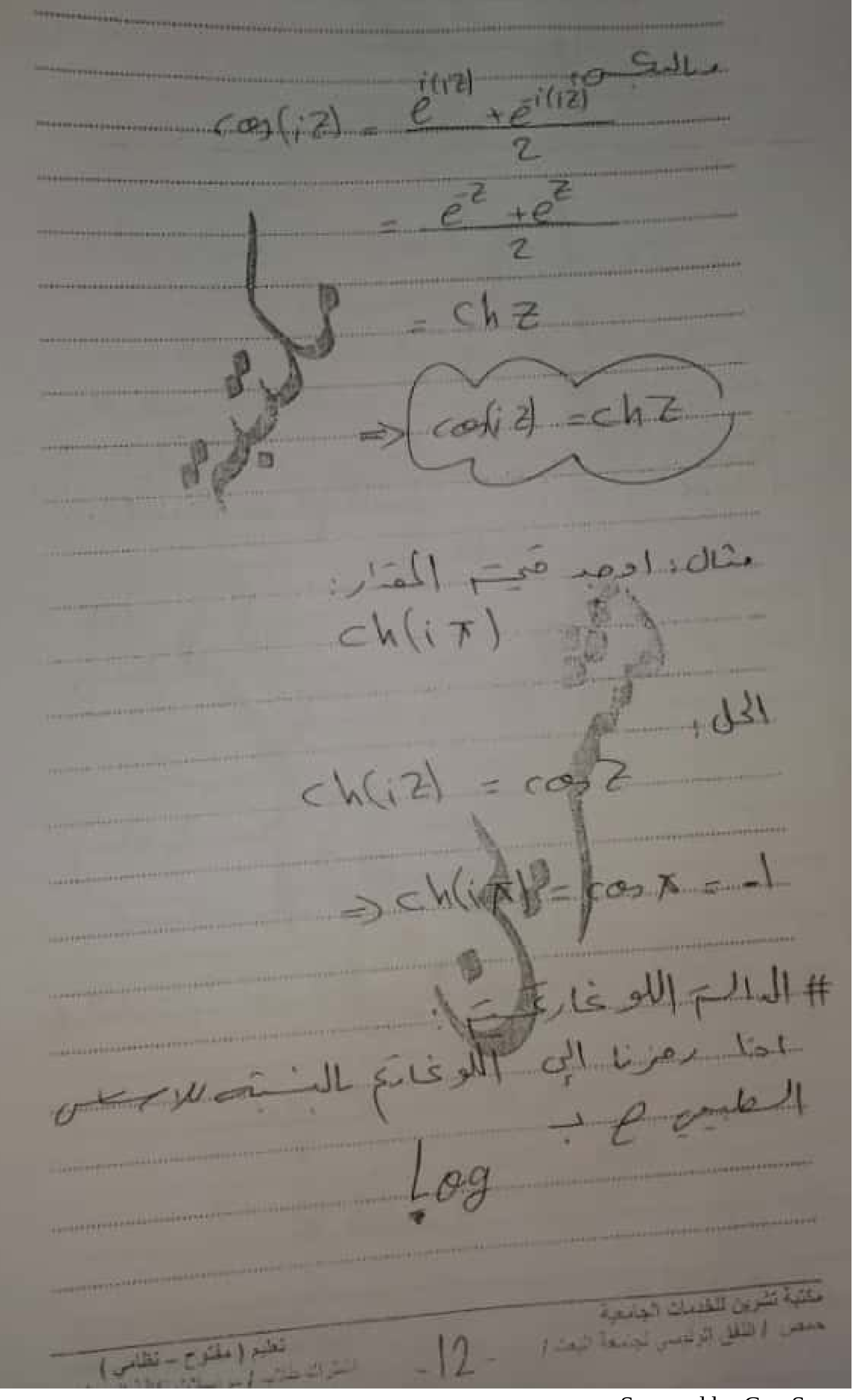
$$sh\,i\,\frac{\pi}{2} = i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= i \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

العلاقة بين الجيب الزائدي والجيب المثلثي:

$$ch(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$= \cos Z$$



بالعكس:

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2}$$

$$= \frac{e^{-z} + e^{z}}{2}$$

$$= ch\, z$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(iz) = ch\, z}$$

مثال: اوجد قيمة المقدار:

$ch(i\pi)$

الحل:

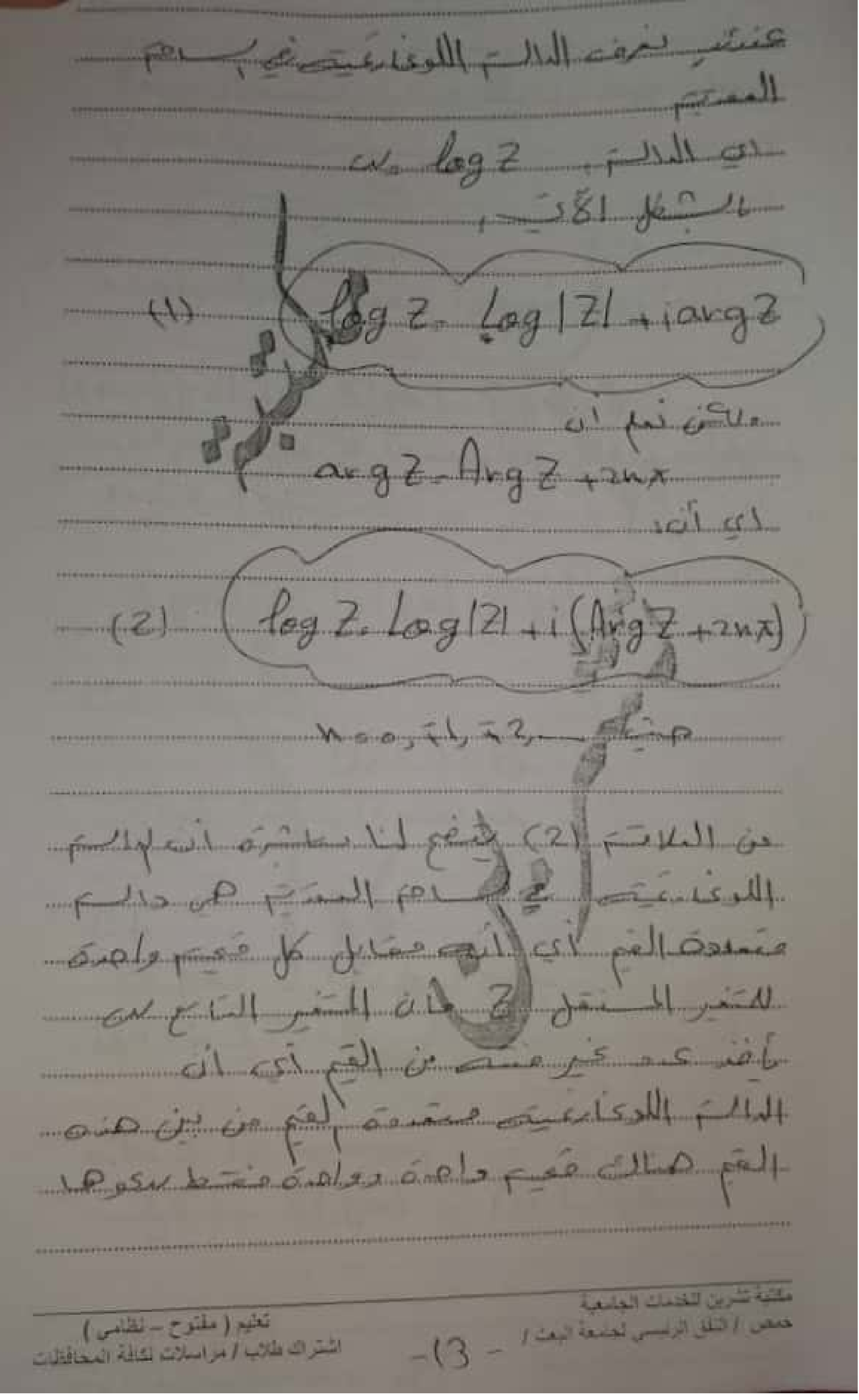
$$ch(iz) = \cos z$$

$$\Rightarrow ch(i\pi) = \cos \pi = -1$$

التابع اللوغاريتمي:

اذا رمزنا الى اللوغاريتم النسبة للاساس الطبيعي e بـ

Log


عندئذٍ نعرف الدالة اللوغاريتمية في المستوي

العقدي

أي الدالة $\log z$ حيث

بالشكل الآتي

$$\log z = \operatorname{Log}|z| + i \arg z \qquad (1)$$

ولكن نعلم أن

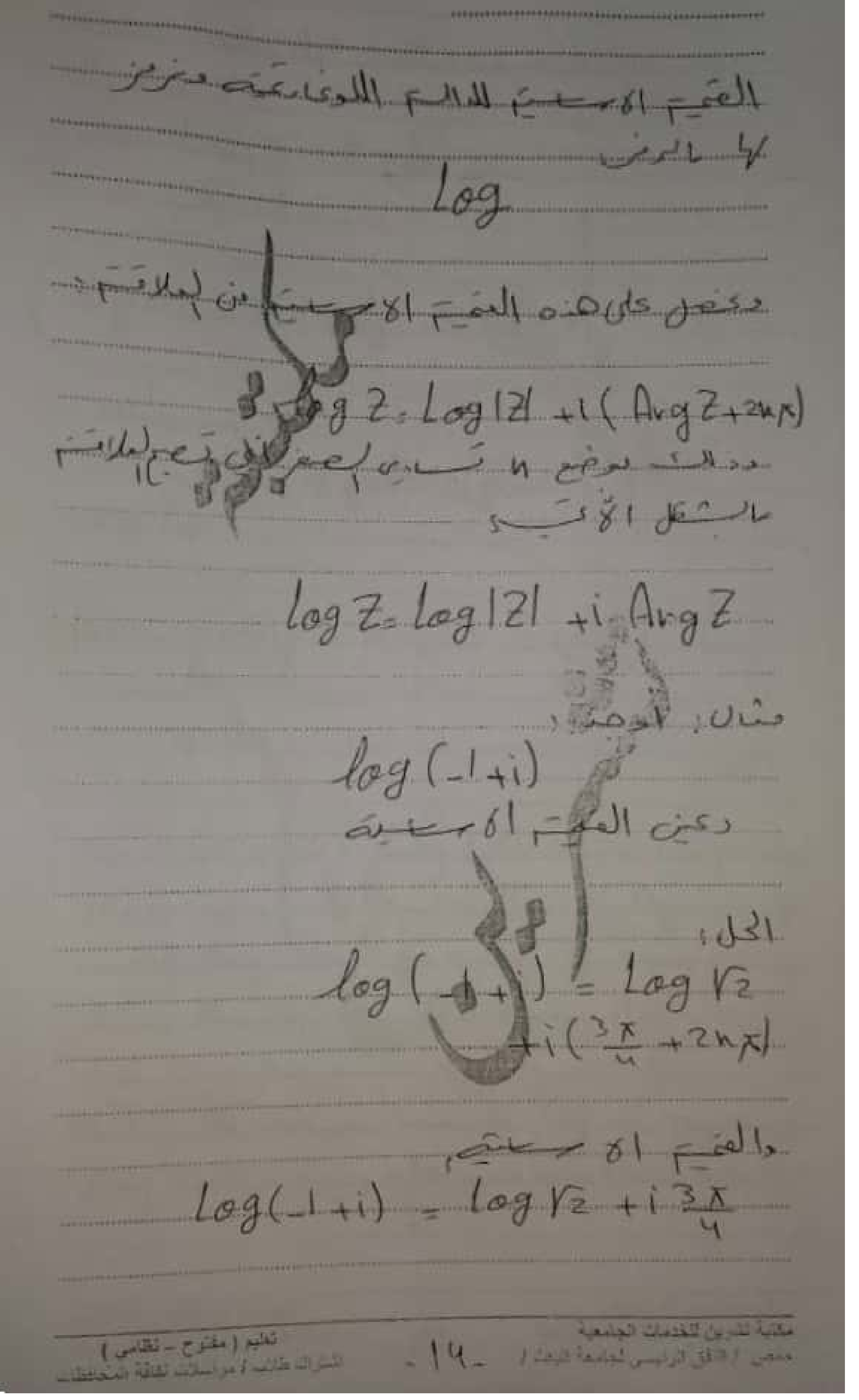
$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi$$

أي أن

$$\log z = \operatorname{Log}|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2n\pi) \qquad (2)$$

حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

من العلاقة (2) يتضح لنا مباشرة أن الدالة اللوغاريتمية في المستوي العقدي هي دالة متعددة القيم أي أنه مقابل كل قيمة واحدة للمتغير المستقل z فإن المتغير التابع له يأخذ عدد غير منته من القيم أي أن الدالة اللوغاريتمية متعددة القيم من بين هذه القيم هنالك قيمة واحدة وواحدة فقط نسميها



القيم الرئيسية للدالة اللوغاريتمية ونرمز لها بالرمز

Log

ونحصل على هذه القيم الرئيسية من العلاقة:

$$\log z = \operatorname{Log}|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2n\pi)$$

وذلك بوضع n تساوي الصفر في العلاقة (1) فتصبح العلاقة بالشكل الآتي:

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|z| + i\operatorname{Arg} z$$

مثال: أوجد

$$\log(-1+i)$$

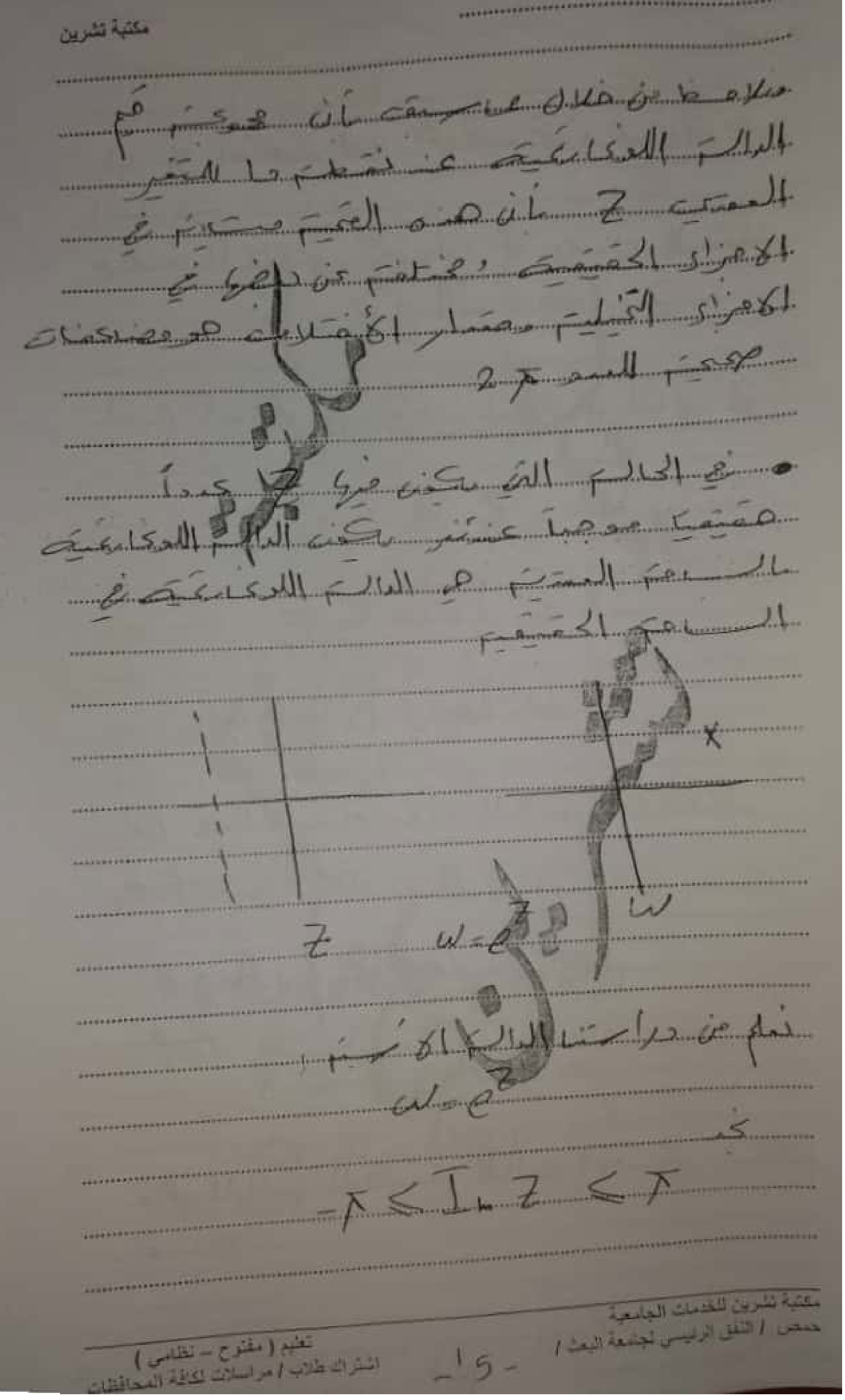
وعين القيمة الرئيسية

الحل:

$$\log(-1+i) = \operatorname{Log}\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

والقيمة الرئيسية:

$$\operatorname{Log}(-1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}$$



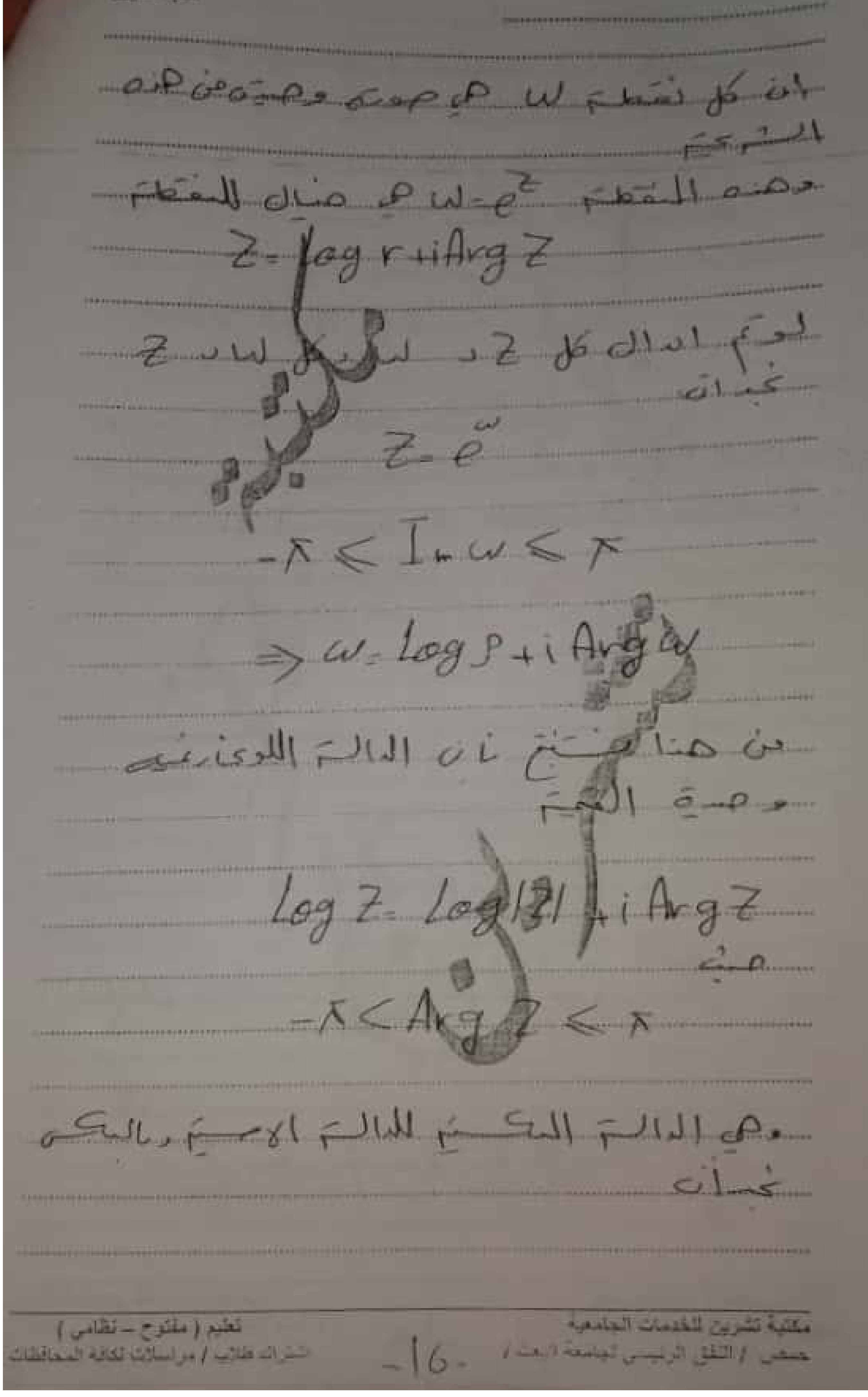
نلاحظ من خلال ما سبق بأن مجموعة قيم الدالة اللوغاريتمية عند تعاظم قيم المتغير المستقل z بأن هذه القيم متساوية في الأجزاء الحقيقية وتختلف عن بعضها في الأجزاء التخيلية بمقدار الأضلاع مع مضاعفات صحيحة للعدد 2π

• في الحالة التي يكون فيها z عدداً حقيقياً موجباً عندئذ يكون الدالة اللوغاريتمية بالمعنى العقدي هي الدالة اللوغاريتمية في الساحة الحقيقية

نعلم من دراستنا الدالة الأسية $w = e^z$

كما

$$-\pi < \operatorname{Im} z \le \pi$$



أي أن كل نقطة لها صورة وحيدة من هذه المستوي كله

وهذه النقطة $w = e^z$ هي مثال للنقطة

$$z = \log r + i \operatorname{Arg} z$$

لعكس الدالة كل z له w لها z نجد أن

$$z = e^w$$

$$-\pi \le \operatorname{Im} w \le \pi$$

$$\Rightarrow w = \log \rho + i \operatorname{Arg} w$$

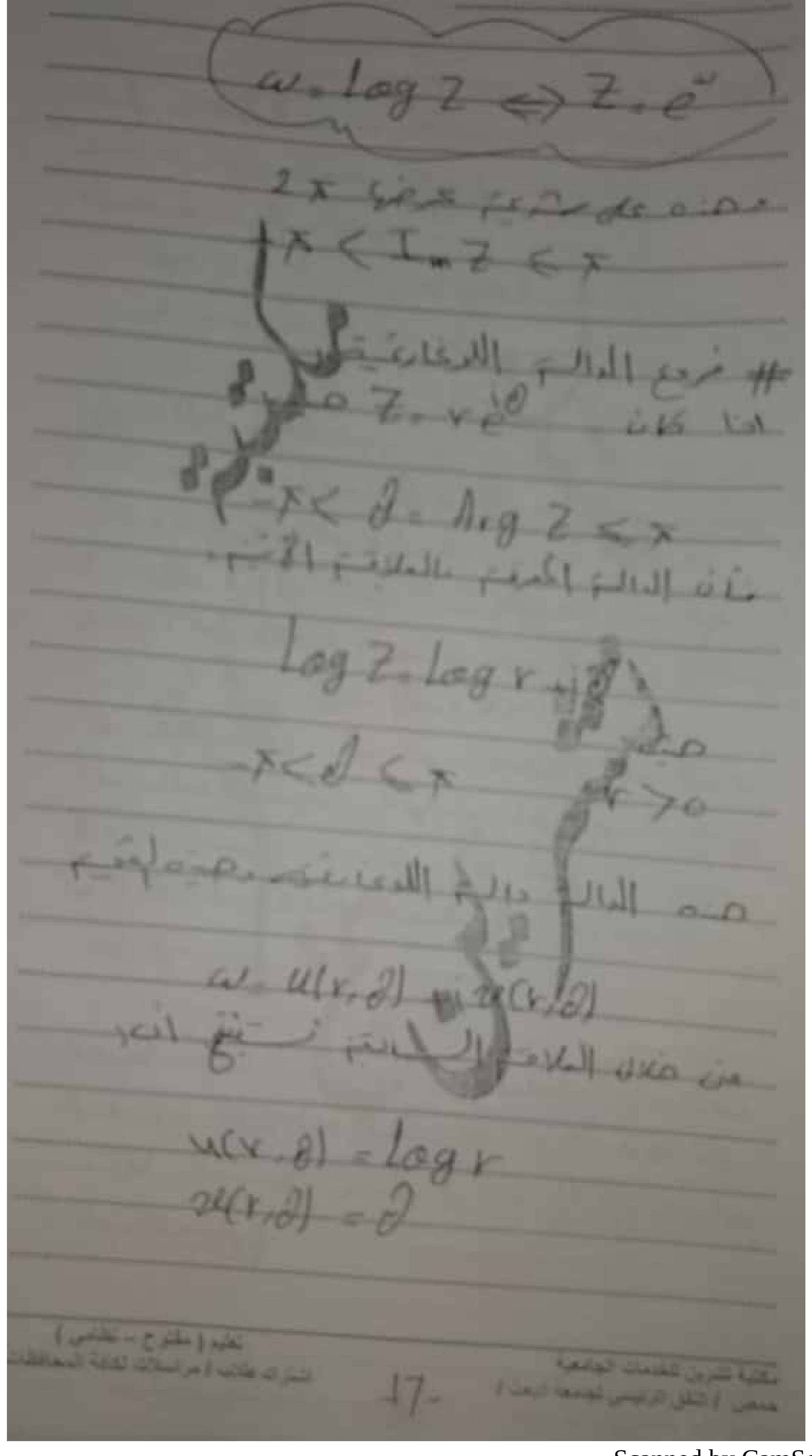
من هنا نستنتج أن الدالة اللوغاريتمية وحيدة القيمة

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|z| + i \operatorname{Arg} z$$

حيث

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \le \pi$$

هي الدالة العكسية للدالة الأسية وبالعكس نجد أن



$w = \log z \Leftrightarrow z = e^{w}$

معنى هذا على شريط عرضه 2π

$-\pi < I_m z \le \pi$

فروع الدالة اللوغاريتمية

اذا كانت $z = re^{i\theta}$

$-\pi < \theta = \arg z \le \pi$

فإن الدالة تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\log z = \log r + i\theta$$

$r > 0$

$-\pi < \theta \le \pi$

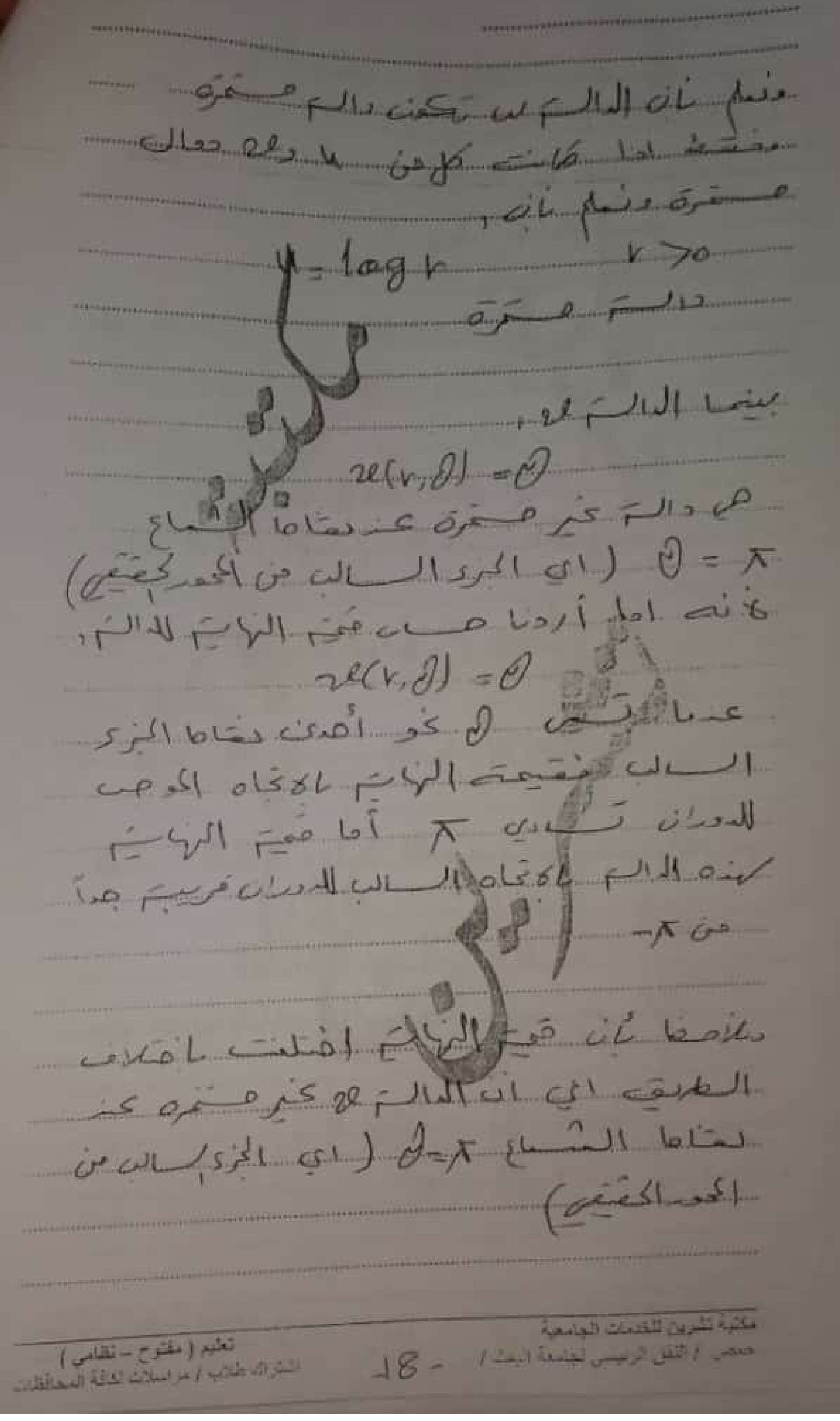
هو الدالة دالة اللوغاريتمية

$w = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$

من خلال العلاقة السابقة نستنتج أن

$u(r,\theta) = \log r$

$v(r,\theta) = \theta$


ونعلم بأن الدالة لكي تكون دالة مستمرة
مختلطة اذا كانت كل من u و v دوال حقيقية
مستمرة ونعلم بأن ،

$u = \log r \qquad r > 0$

دالة مستمرة

بينما الدالة v ،

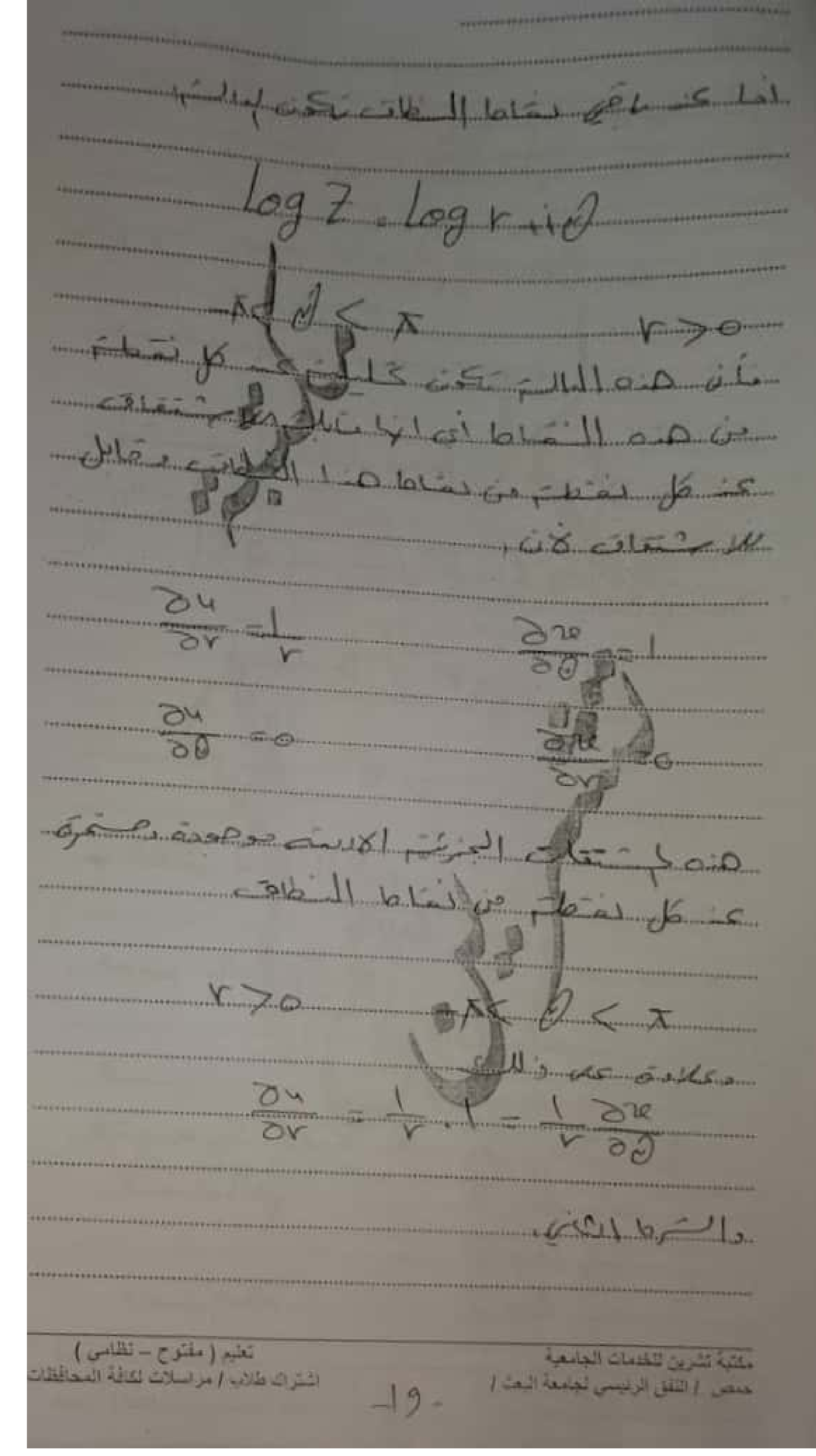
$v(r, \theta) = \theta$

هي دالة غير مستمرة عند نقاط الشعاع
$\theta = \pi$ (اي الجزء السالب من المحور الحقيقي)
لأنه اذا أردنا حساب قيمة النهاية للدالة ،

$v(r, \theta) = \theta$

عندما تقترب θ نحو أحدى نقاط الجزء
السالب فقيمة النهاية بالاتجاه الموجب
للدوران تساوي π أما قيمة النهاية
لهذه الدالة بالاتجاه السالب للدوران قريبة جداً
من $-\pi$

ولاحظنا بأن قيمة النهاية اختلفت باختلاف
الطريق اي ان الدالة v غير مستمرة عند
نقاط الشعاع $\theta = \pi$ (اي الجزء السالب من
المحور الحقيقي)



أما عند باقي نقاط المستوى فتكون الدالة

$$\log z = \log r + i\theta$$

$$-\pi < \theta < \pi \qquad r > 0$$

فإن هذه الدالة تكون تحليلية عند كل نقطة من هذه النقاط أي أنها تقبل الاشتقاق عند كل نقطة من نقاط هذا الجانب ومقابل الاشتقاق لأن:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

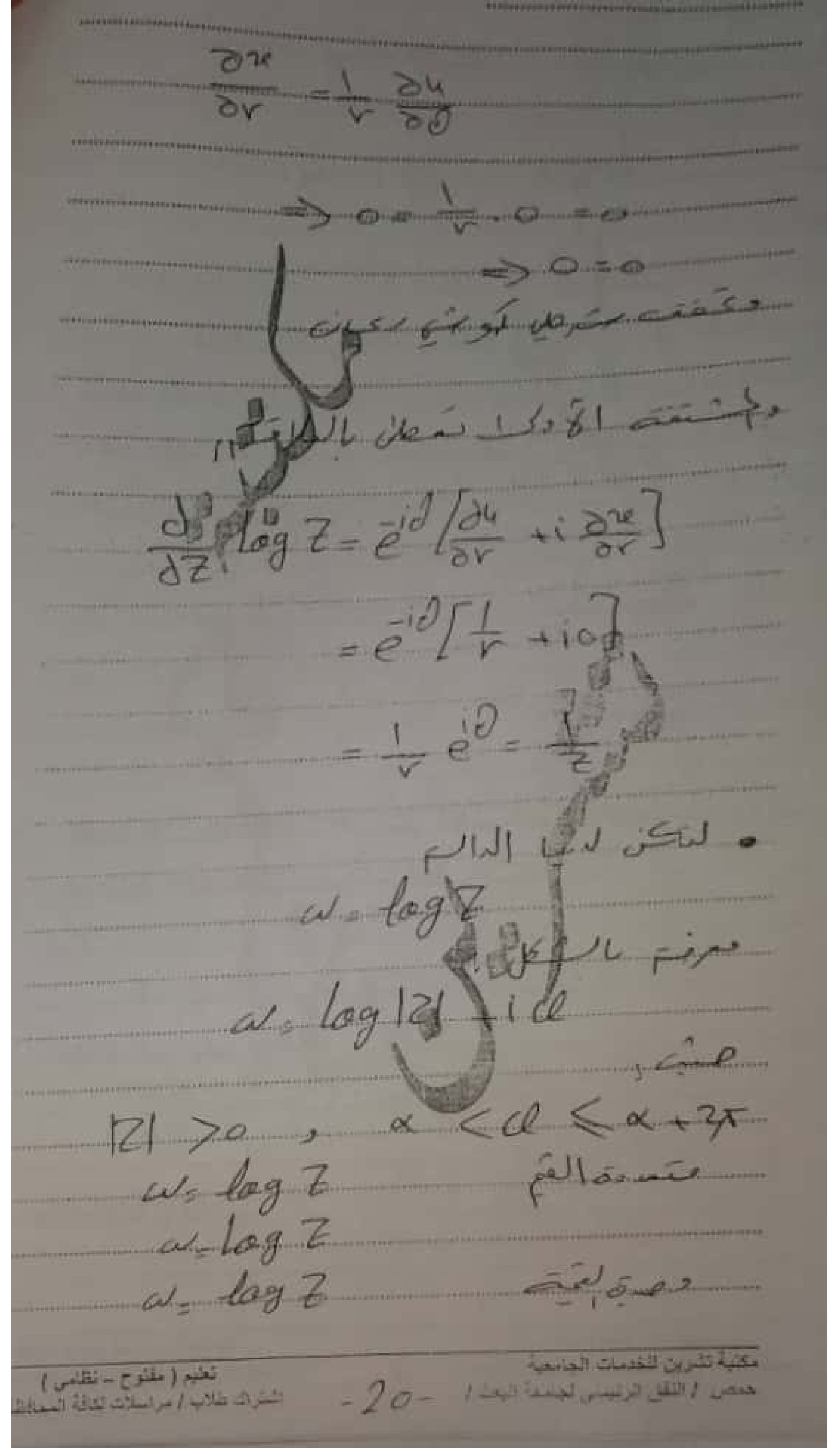
هذه المشتقات الجزئية الأولى موجودة ومستمرة عند كل نقطة من نقاط المنطقة

$$r > 0 \qquad -\pi < \theta < \pi$$

ومحققة عند ذلك

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot 1 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

والشرط الثاني



$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{r}\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

وتتحقق شرطي كوشي ريمان

والمشتقة الأولى تعطى بالعلاقة:

$$\frac{d}{dz}\log z = e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

$$= e^{-i\theta}\left[\frac{1}{r} + i0\right]$$

$$= \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$$

• لتكن لدينا الدالة

$$w = \log z$$

معرفة بالعلاقة

$$w = \log|z| + i\theta$$

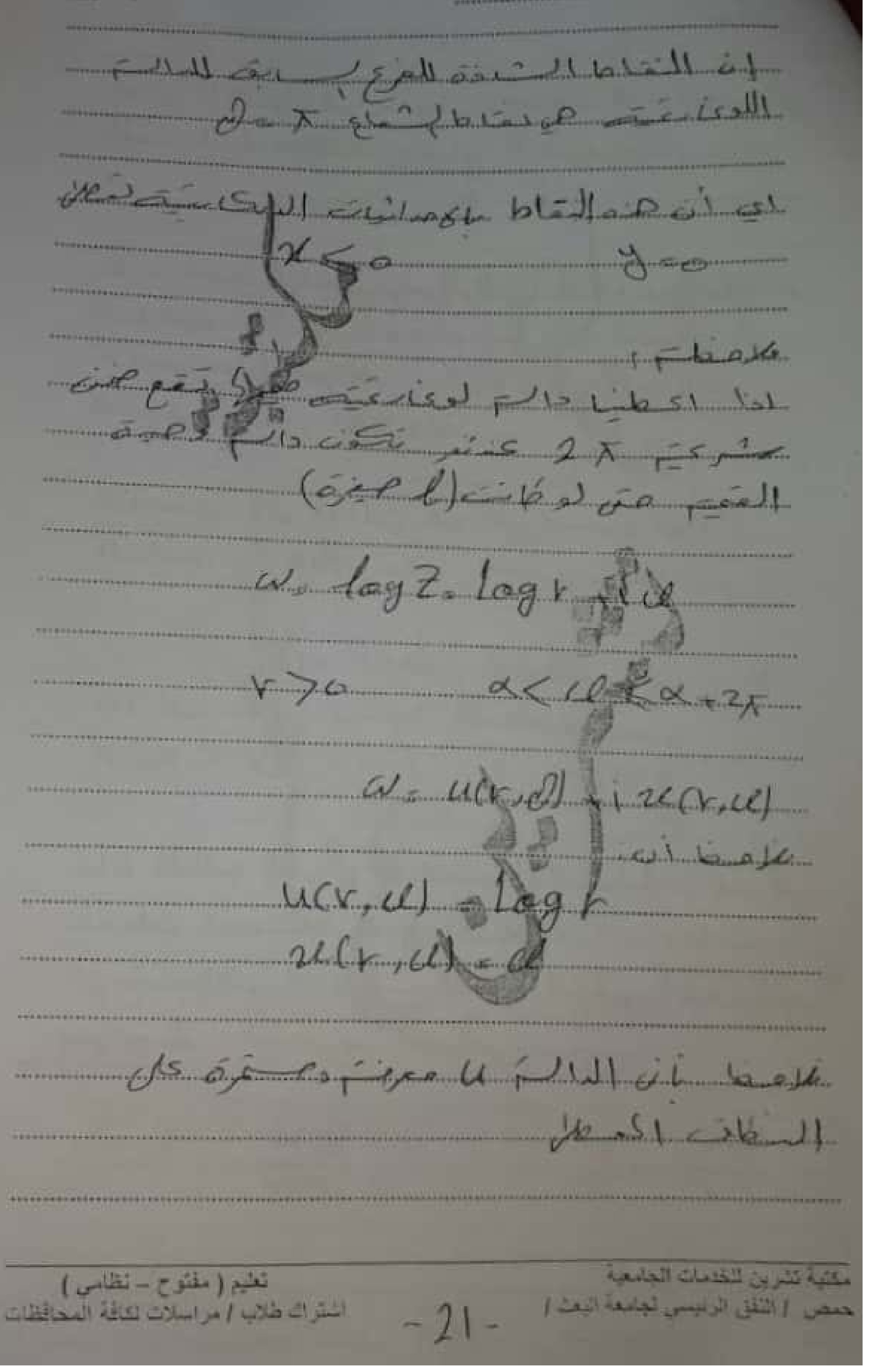
حيث

$$|z| > 0 \quad , \quad \alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$$

$w = \log z$ متصلة القيم

$w = \log z$

$w = \log z$ مستمرة تحليلية



إن النقاط الشاذة للفرع الرئيسي للدالة اللوغاريتمية هي نقاط الشعاع π

أي أن هذه النقاط بإحداثيات السالبة

$x<0$ $\quad y=0$

ملاحظة:

إذا أعطينا دالة لوغاريتمية يقع ضمن شريحة عرضها 2π تكون دالة وحيدة القيم حتى لو كانت (z صغيرة)

$$w = \log z = \log r + i\theta$$

$r>0 \quad \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$

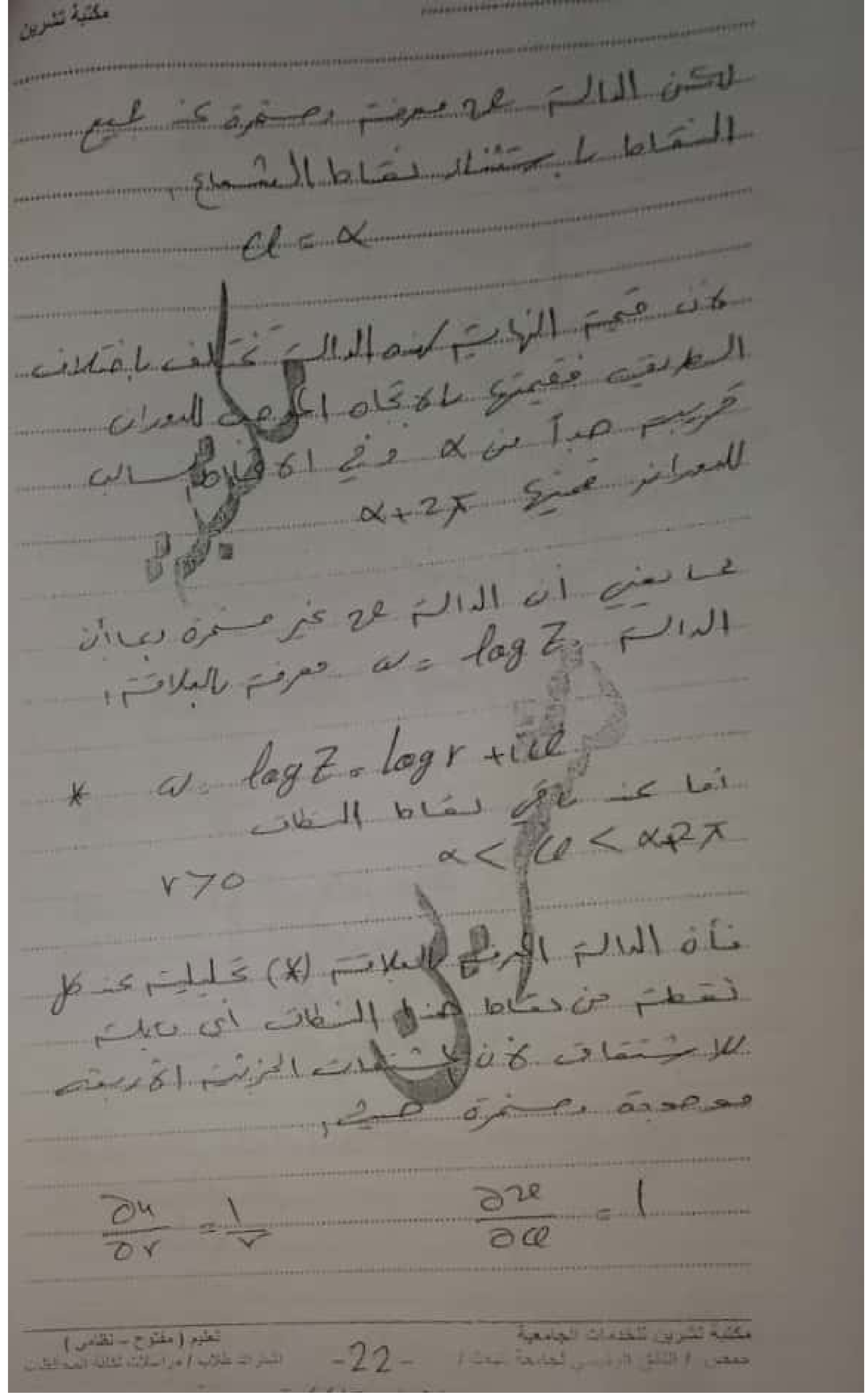
$$w = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$$

نلاحظ أنه

$u(r,\theta) = \log r$

$v(r,\theta) = \theta$

نلاحظ بأن الدالة u معرفة ومستمرة على كل النطاق المعطى



لكن الدالة u معرفة ومستمرة عند جميع النقاط باستثناء نقاط الشعاع ،

$\theta = \alpha$

لأن قيمة الزاوية لهذه الدالة تختلف باختلاف الطريقة فقيمتها باتجاه الأعلى للمحور قريبة جداً من α وفي الأسفل للمحور قيمتها $\alpha + 2\pi$

مما يعني أن الدالة u غير مستمرة وبما أن الدالة $\log z = u$ معرفة بالعلاقة :

$$* \quad u = \log z = \log r + i\theta$$

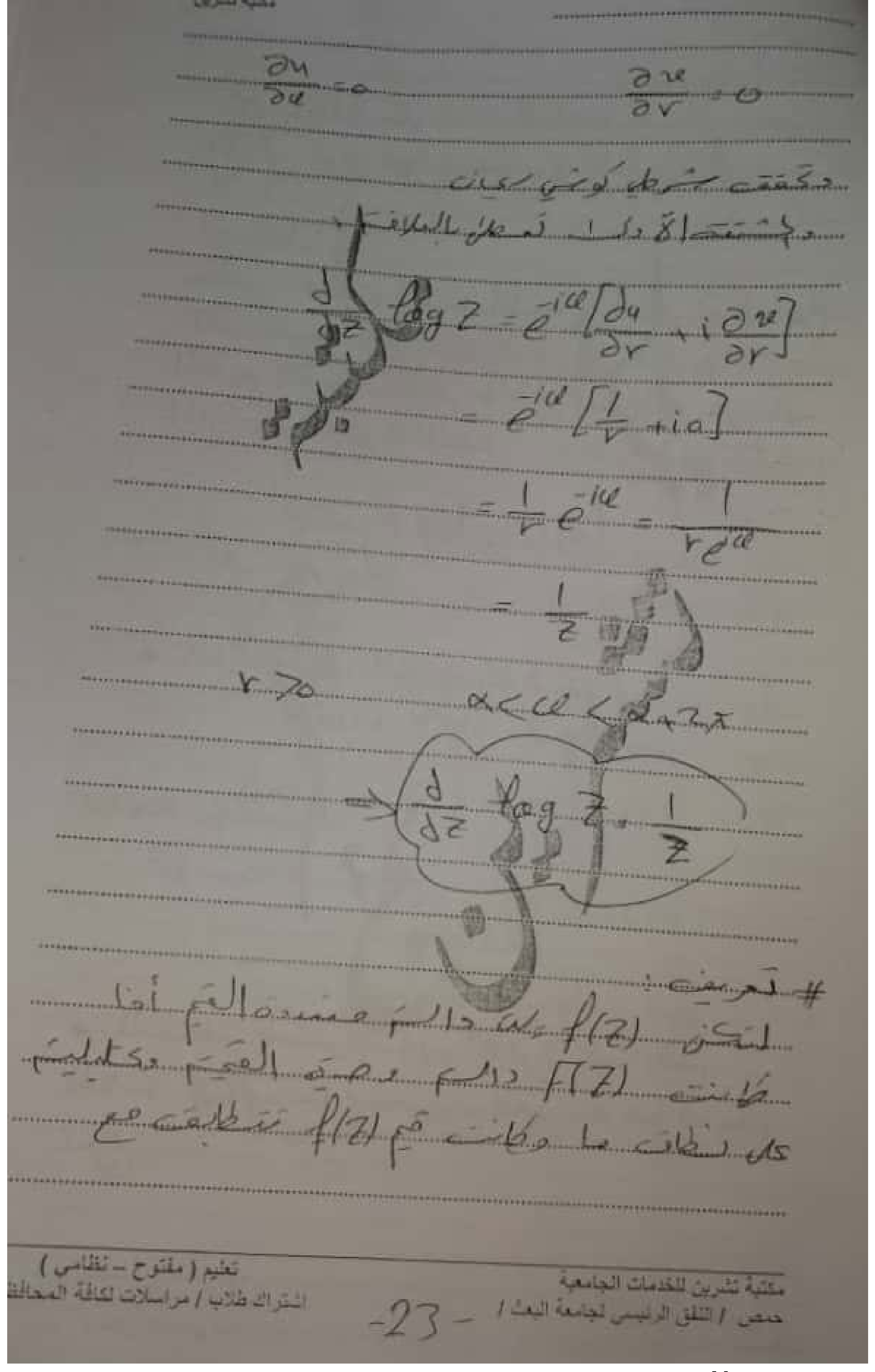
أما عند نقاط القطاع

$$\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$$

$$r > 0$$

فإن الدالة المعرفة بالعلاقة (*) تحليلية عند كل نقطة من نقاط هذا القطاع أي قابلة للاشتقاق لأن المشتقات الجزئية الأولى موجودة ومستمرة حيث ،

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$



$\frac{\partial u}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = 0$

∴ تحقق شرطي كوشي ريمان

∴ مشتقة الدالة تعطى بالعلاقة :

$$\frac{d}{dz}\log z = e^{-ia}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

$$= e^{-ia}\left[\frac{1}{r} + i.0\right]$$

$$= \frac{1}{r}e^{-ia} = \frac{1}{re^{ia}}$$

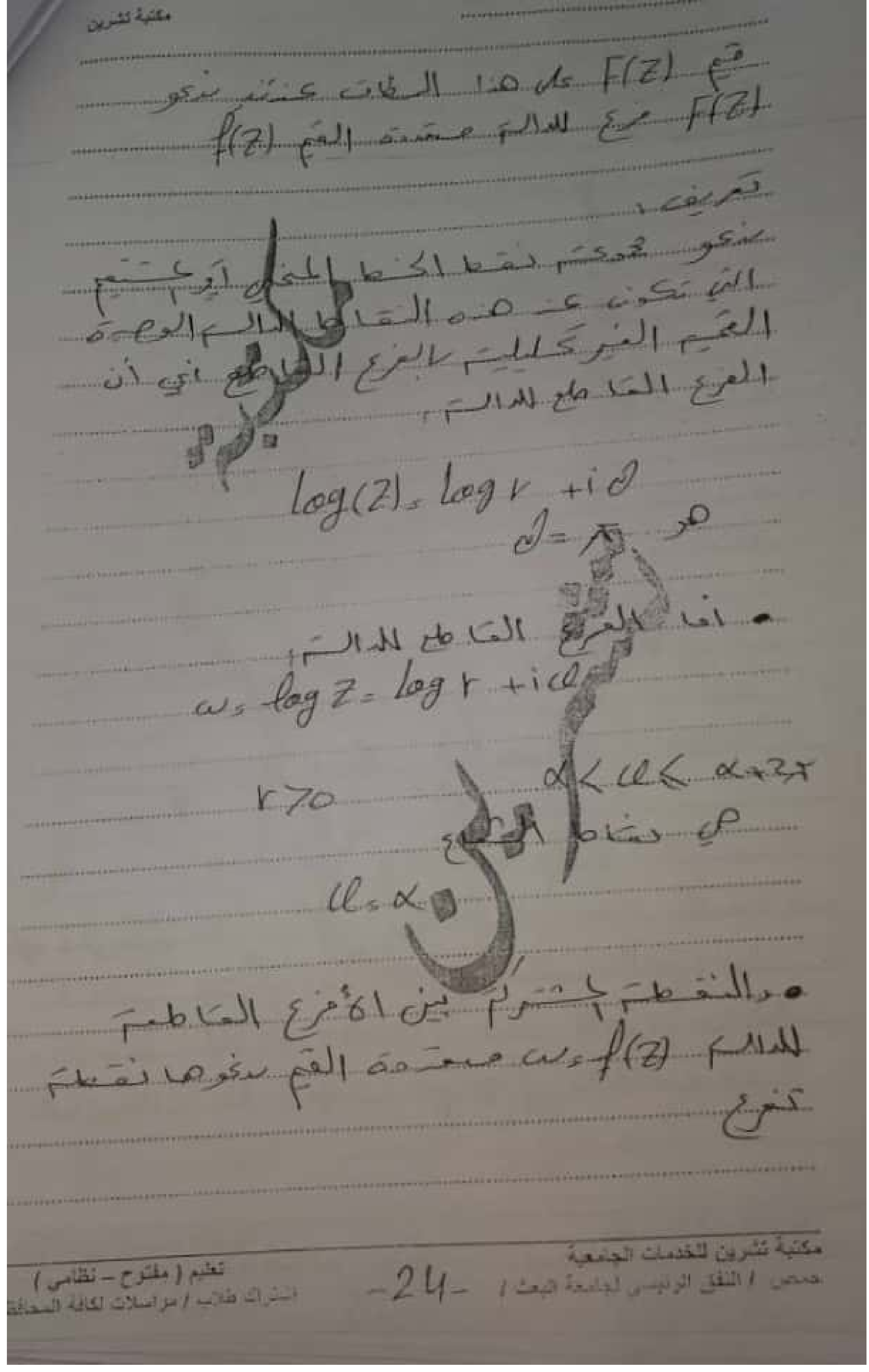
$$= \frac{1}{z}$$

$r > 0 \qquad \alpha < a < \alpha + 2\pi$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}$$

تعريف :

لتكن $f(z)$ على دالة متعددة القيم أما
كانت $F(z)$ دالة وحيدة القيم وتحليلية
على نطاق ما وكانت قيم $F(z)$ تتطابق مع



قيم $F(Z)$ على هذا السطح عندئذ ندعو $F(Z)$ فرع للدالة متعددة القيم $f(Z)$

تعريف:

ندعو مجموعة نقط الخط المغلق أي مجموعة التي تتكون عن هذه النقاط للدالة الوحيدة القيم الغير تحليلية بالفرع القاطع أي أن الفرع القاطع للدالة:

$$\log(Z) = \log r + i\theta$$

هو $\theta = \pi$

• أما الفرع القاطع للدالة:

$$w = \log z = \log r + i\theta$$

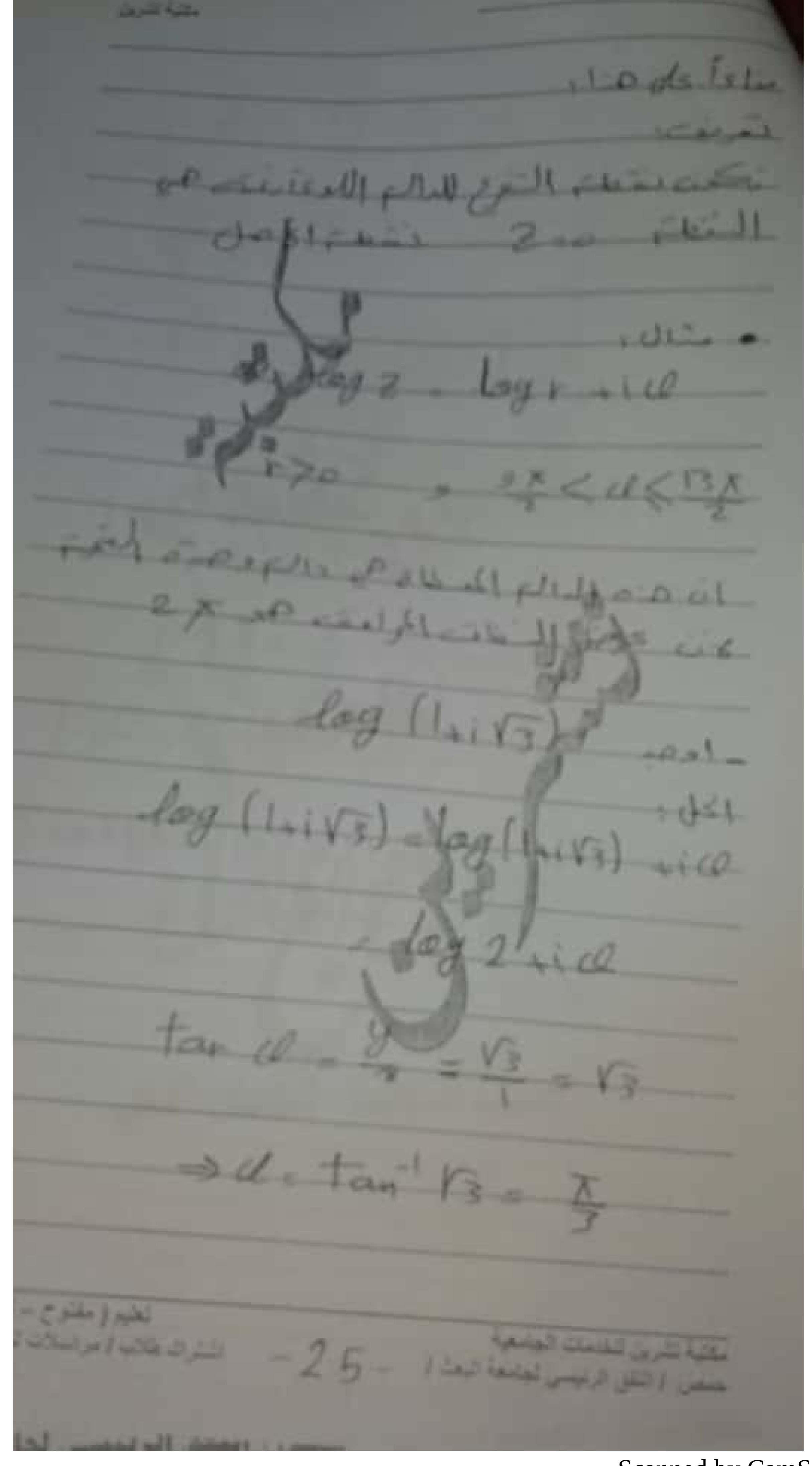
$$\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$$

$$r > 0$$

هي نقاط الفرع القاطع

$$\theta = \alpha$$

• النقطة المشتركة بين الأفرع القاطعة للدالة $f(Z)$ متعددة القيم ندعوها نقطة تفرع



ماذا على هذا:

تعريف:

تكون نقطة التفرع للدالة اللوغاريتمية هي

النقطة $z = 0$ نقطة الأصل

• مثال:

$$\log z = \log r + i\theta$$

$$r > 0 \quad , \quad \frac{9\pi}{2} < \theta \le \frac{13\pi}{2}$$

أوجد [illegible]

أي أن من الدالة اللوغاريتمية [illegible]

على [illegible] 2π

$$\log(1 + i\sqrt{3})$$

- أوجد

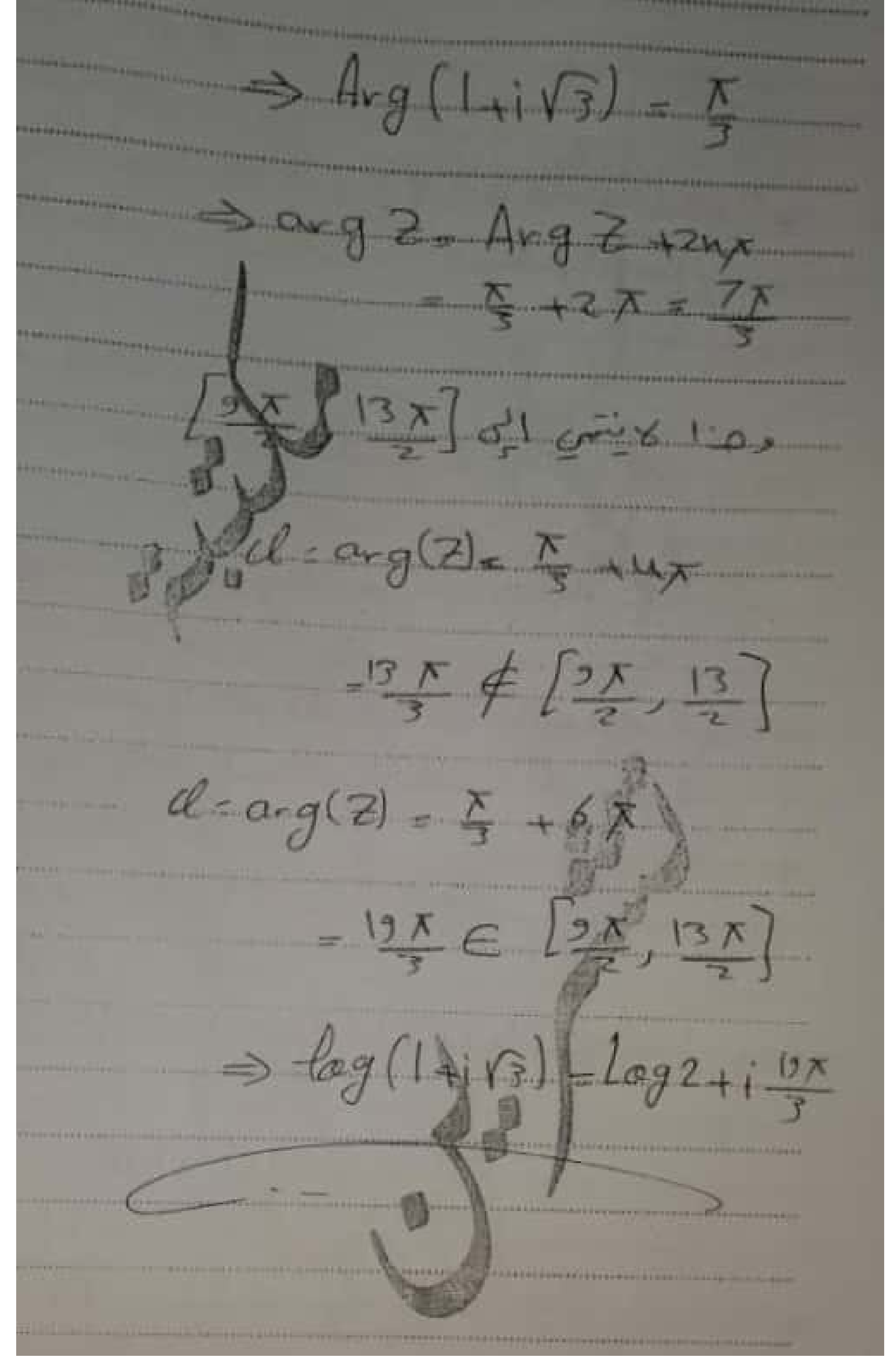
الحل:

$$\log(1 + i\sqrt{3}) = \log|1 + i\sqrt{3}| + i\theta$$

$$= \log 2 + i\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$



$$\Rightarrow Arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \arg z = Arg\, z + 2n\pi$$

$$= \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$$

وهذا لا ينتمي الى $\left[\frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}\right]$

$$\alpha = \arg(z) = \frac{\pi}{3} + 4\pi$$

$$= \frac{13\pi}{3} \notin \left[\frac{9\pi}{2}, \frac{13}{2}\right]$$

$$\alpha = \arg(z) = \frac{\pi}{3} + 6\pi$$

$$= \frac{19\pi}{3} \in \left[\frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \log(1+i\sqrt{3}) = Log\, 2 + i\,\frac{19\pi}{3}$$